CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-17 februarie 2018
Filiera teoretică: profilul științele naturii
Clasa a XII-a-barem

1. **Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ și $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.**

a) **Să se calculeze $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2$, unde e_1, e_2 sunt elementele neutre ale celor două legi.**

b) **Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția să fie un izomorfism între $(\mathbb{R},*)$ și $(\mathbb{R},\circ)$**

c) **Să se rezolve în numere reale ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2018\ ori} = 3$**

d) **Aflați $m, n \in \mathbb{N}$, astfel încât $m * n = 9$.**

Soluție:

a) $e_1 = 3, e_2 = 4$ 1p
$e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2 = 7$ 1p

b) $a = 1$ 1p

c) $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2018\ ori} = (x-2)^{2018} + 2$(inducție) 1p
$x = 1, x = 3$ 1p

d) $m = 3, n = 9$ sau $m = 9, n = 3$ 2p

2. **Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x,y) \middle| A(x,y) = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & y \\ \hat{0} & x & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.**

a) **Să se determine numărul elementelor mulțimii *G*.**

b) **Să se calculeze $A(\hat{1},\hat{2}) \cdot A(\hat{2},\hat{0})$.**

c) **Să se determine numărul matricelor inversabile din mulțimea *G*.**

Soluție:

a) Sunt 16 elemente 1p

b) $A(\hat{1},\hat{2}) \cdot A(\hat{2},\hat{0}) = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$ 2p

c) $detA = x^2$ 1p
$x^2 \neq \hat{0}$ 1p
$x = \hat{1}, \hat{3}$ 1p
Sunt 8 matrice 1p

3. **Se consideră funcțiile $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = x^2 + mx + 1$.**

a) **Calculați $\int (f_2(x)e^x)dx$.**

b) **Calculați $\int \left(x\sqrt{f_0(x)}\right)dx$.**

c) **Calculați $\int \left(\frac{1}{f_4(x)+4}\right)dx$.**

Soluție:

a) $(x^2+1)e^x + C$ 3p

b) $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)} + C$ 2p

c) $arctg(x+2) + C$ 2p

4. **Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ 2x+1, x < 0 \end{cases}$.**

a) **Să se arate că funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$.**

b) **Fie F primitiva lui f astfel încât $F(-1) = 10$. Să se calculeze $F(2)$.**

Soluție:

a) Se demonstrează că funcția este continuă 2p

b) $F(2) = e^2 + 9$ 5p

Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, va fi punctată în mod corespunzător.