Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală Dâmbovița
17-02-2019
Barem clasa a IX-a

Subiectul 1. a) Arătați că : i) dacă $x \in Z$, $[x]+[-x]=0$

ii) dacă $x \notin Z$, $[x]+[-x]=-1$.

b) Rezolvați ecuația: $[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+1=0$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

***

Soluție.

a) $[x]+[-x]=0 \quad \forall x \in Z$ .... 2 p

$[x]+[-x]=-1 \quad \forall x \notin Z$ ....2 p

b) $x \in Z \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii...1 p

$x \notin Z$ și $2x \notin Z$ $\Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii..1 p

$x \notin Z$ și $2x \in Z$ $\Rightarrow$ ecuaţia are soluţiile $x=\left\{\dfrac{2k+1}{2}, k \in Z\right\}$ ....1 p

Subiectul 2. Arătați că pentru orice $n \in N^*$, numărul $2^{2n-1}-(-2)^{n-1}-1$ se divide cu 9.

(GM 9/2018)

Soluție.

Verificare pentru $n=1$...1 p

Scrie $P(k)$ și $P(k+1)$, $1 \le k \le n$ .... 2 p

Demonstrează $P(k) \to P(k+1)$, $1 \le k \le n$ ....3 p

Finalizare ....1 p

Subiectul 3. Dacă numerele $a,b,c \geq 0$ satisfac relaţia $a^2+b^2+c^2=1$, arătaţi că:

$$\frac{a^2}{1+nbc}+\frac{b^2}{1+nca}+\frac{c^2}{1+nab} \geq \frac{3}{n+3}$$, pentru orice număr natural n.

Marin Chirciu (GM 10/2014)

Soluţie.

$\sum\frac{a^2}{1+nbc}=\sum\frac{a^4}{a^2+na^2bc}$ ....1 p

$\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2+nabc(a+b+c)}=\frac{1}{1+nabc(a+b+c)}$ ....2 p

$ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2=1$..1 p

$\frac{3abc}{ab+bc+ac} \leq \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \frac{1}{1+nabc(a+b+c)} \geq \frac{9}{9+n(a+b+c)^2}$ ....2 p

Finalizare...1p

Subiectul 4. Se consideră triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ înscrise într-un cerc de centru O. Dacă H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6 sunt ortocentrele triunghiurilor $BAA', CAA', CBB' ABB', ACC'$ şi respectiv BCC', demonstraţi că $\overrightarrow{H_1H_2}+\overrightarrow{H_3H_4}+\overrightarrow{H_5H_6}=\vec{0}$.

(RMT)

Soluţie.

$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA'}$ şi $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}$ .... 3 p

$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ ....2 p

Analog $\overrightarrow{H_3H_4}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{H_5H_6}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$..1 p

Finalizare...1 p