Concurs de Matematică Aplicată
„ADOLF HAIMOVICI”
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019
Clasa a XII-a
Profil servicii

Soluții și barem

1. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea " $*$ ".

Soluţie:

Determinarea elementului neutru $e = -\frac{1}{2}$..........2p

Determinarea formei elementelor simetrizabile $x' = \frac{-4x-3}{4x+4}, x \neq -1$..........2p

$x = \frac{-4x-3}{4x+4} \Rightarrow 4x^2 + 8x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = -\frac{1}{2}$..........3p

2. Pe mulţimea $G = (0,\infty) - \{1\}$ definim legea $x * y = x^{2\ln y}$.

a) Demonstraţi că $x * y \in G$, oricare ar fi x, y elemente din mulţimea G.

b) Determinaţi elementul neutru al legii.

c) Rezolvaţi în G ecuaţia $x * e = 4$, unde e este baza logaritmului natural.

Soluţie:

a) $x > 0 \Rightarrow x * y = x^{2\ln y} > 0$..........1p

Dacă $x * y = x^{2\ln y} = 1 \Rightarrow x = 1$ sau $\ln y = 0 \Leftrightarrow y = 1$ deci $x * y \in G$..........2p

b) Determinarea elementului neutru $E = \sqrt{e}$, e fiind baza logaritmului natural..........2p

c) $x^{2\ln e} = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2; x > 0 \Rightarrow x = 2$ este soluţie..........2p

3. Se consideră funcţia $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+x-2}{x}$, iar F o primitivă a ei pentru care $F(1) = 0$. Să se calculeze $F\left(\frac{3}{2}\right) + F(2)$.

Soluţie:

O primitiva este $F(x) = \int \frac{x^2+x-2}{x}dx = \int\left(x+1-\frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x - 2\ln x + c$..........3p

$F(1) = \frac{1}{2} + 1 + c \Rightarrow \frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$..........3p

$F\left(\frac{3}{2}\right) + F(2) = \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - 2\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2 + 2 - 2\ln 2 - \frac{3}{2} = 4 - \frac{3}{8} - 2\ln 3$ 1p

4. Se consideră funcţiile $f, g, F: [1,\infty) \to \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)(2+\ln x)}, \quad g(x) = \frac{1}{x(a+\ln x)} \text{ şi } \quad G(x) = \ln(a+\ln x).$$

a) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)} - \frac{1}{x(2+\ln x)}$;

b) Să se arate că G este o primitivă a funcţiei g ;

c) Dacă $\boldsymbol{I(x) = \int_1^x f(t)\,dt}$ calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)$

Soluţie:

a) Demonstrarea cerinţei..2p

b)G continuă și derivabilă pe $[\mathbf{1}, \infty)$, $G' = g$..2 p

c) $I(x) = \int_1^x f(t)\,dt = ln(1 + lnx) - ln(2 + lnx) + ln2$..2p

$\lim\limits_{x\to\infty} I(x) = \ln 2$ 1p