

**Concurs de Matematică Aplicată
„ADOLF HAIMOVICI”
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019
Clasa a XII-a
Profil științele naturii-barem**

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$
- Să se rezolve ecuația $x * x = -1, x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine elementele simetrizabile față de legea data, din mulțimea numerelor întregi.
 - Știind că legea este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2019} * \frac{2}{2019} * \frac{3}{2019} \dots * \frac{2019}{2019}$.

Soluție:

- a) $x = 2 \pm \sqrt{3}$ 1p
 b) $e = 1$ 1p
 $x' = 2 - \frac{1}{2-x}, x \in \{1,3\}$ 2p
 c) $x * y = -(x-2)(y-2) + 2$ 1p
 $x * 2 = 2, y * 2 = 2, x * \frac{4038}{2019} * y = 2$ 2p

2. Pe mulțimea $M = (1, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$.
- Să se demonstreze că legea este asociativă.
 - Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $x * y = 5$

Soluție:

- a) demonstrația completă 3p
 b) $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$ 1p
 $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 24$ 1p
 $x = 2, y = 3$ 2p

3. Se consideră funcțiile $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.

- a) Să se determine primitiva funcției f al cărei grafic intersectează axa absciselor în $x = 1$.

b) Calculați $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

c) Calculați $\int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$.

Soluție:

- a) $F(x) = x \ln x - x + 1$ 2p
 b) $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx = 1 - 2 \ln 2$ 2p
 c) $\int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2}$ 3p

4. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - 1, g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- a) Să se determine $g(x)$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 |x| f(x) dx$.

Soluție:

- a) $g(x) = e^x - x - 1$ 3p
 b) $\int_{-1}^1 |x|(e^x - 1) dx = \int_{-1}^0 -x(e^x - 1) dx + \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \frac{e-2}{e}$ 4p

Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, va fi punctată în mod corespunzător.