

**CONCURSUL NAȚIONAL "PEDAGOGIA MATEMATICII"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ, 08.03.2025**  
**CLASA a 9-a**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 15 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului**

**Problema 1** ( autor Eugenia Dincă)

Se consideră numărul rațional  $a = \frac{2}{7}$  scris sub forma zecimală  $a = 0,\overline{a_1a_2\dots a_n}$ .

- a) Calculați suma primelor 6 zecimale ale numărului  $a$ .
- b) Determinați  $a_{2025}$ .
- c) Calculați suma primelor 2025 de zecimale ale numărului  $a$ .

Soluție:

- a)  $a = 0,(285714)\dots\dots\dots 3p$   
suma= 27.....2p
- b) Zecimalele numărului  $a$  se grupează în grupe de câte 6 cifre datorită perioadei.....2p  
 $2025:6=337$  rest 3 , deci, sunt 337 de grupe complete.....1p  
 $a_{2025}$  ocupă poziția 3 în ultima grupă incompletă , deci  $a_{2025}=5$ .....2p
- c) suma primelor 6 zecimale ale numărului  $a$  este 27 , fiind 337 grupe complete calculăm  
 $337 \times 27 = 9099$ .....2p  
adăugăm suma zecimalelor din ultima grupă incompletă  $2+8+5=15$ .....1p  
suma primelor 2025 de zecimale este 9114.....2p

**Problema 2** (autor Ana Maria Ioniță)

- a) Să se arate că, oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$ , numerele  $(a+b)^2$ ,  $a^2+b^2$  și  $(a-b)^2$  sunt în progresie aritmetică.
- b) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  pentru care are loc egalitatea  $8+4+2+\dots+2^{(3-n)} = \frac{127}{8}$ .

Soluție:

- a)  $(a+b)^2$ ,  $a^2+b^2$  și  $(a-b)^2$  sunt în progresie aritmetică  $\Leftrightarrow a^2+b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$   
...2p

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{2} = a^2 + b^2 \dots\dots\dots 2p$$

Deci, numerele  $(a+b)^2$ ,  $a^2 + b^2$  și  $(a-b)^2$  sunt în progresie aritmetică, oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$ ..... 1p

**b)**  $8 + 4 + 2 + \dots + 2^{(3-n)} = 2^3 + 2^2 + 2 + \dots + 2^{(3-n)}$ , deci se observă că termenii sumei sunt termenii unei progresii geometrice de rație  $q = 2^{-1}$ ..... 2p

Suma conține  $n+1$  termeni ..... 1p

$$8 + 4 + 2 + \dots + 2^{(3-n)} = 8 \cdot \frac{(2^{-n-1} - 1)}{(2^{-1} - 1)} = -16(2^{-n-1} - 1) = \frac{127}{8} \dots\dots\dots 3p$$

$$2^{-n-1} - 1 = -\frac{127}{128}, 2^{-n-1} = 2^{-7} \dots\dots\dots 2p$$

$$-n - 1 = -7, n = 6 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2p$$

**Problema 3**

Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}$ .

a) Calculați media aritmetică a numerelor  $m = f(0)$  și  $n = f(2)$ .

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $f(x) - 1 \leq 0$ .

c) Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$ , știind că punctul  $M(a\sqrt{3}, b)$  este situat pe graficul funcției  $f$ .

Soluție:

**a)**  $m = f(0) = \sqrt{3}$  și  $n = f(2) = 2 - \sqrt{3}$  .....2p

$$\frac{m+n}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2} = 1 \dots\dots\dots 3p$$

**b)**  $f(x) - 1 \leq 0 \Rightarrow (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3} - 1 \leq 0$  .....1p

$(1 - \sqrt{3})x \leq 1 - \sqrt{3}$  se împarte relația la  $1 - \sqrt{3} < 0$  .....2p

$\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$  .....2p

**c)**  $M(a\sqrt{3}, b) \in G_f \Leftrightarrow f(a\sqrt{3}) = b$  .....3p

$f(a\sqrt{3}) = (1 - \sqrt{3})a\sqrt{3} + \sqrt{3} = (a+1)\sqrt{3} - 3a$  .....4p

Din  $f(a\sqrt{3}) = b \Rightarrow (a+1)\sqrt{3} - 3a = b$ , dar  $a$  și  $b$  sunt raționale.....2p

Deci  $(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$  .....3p

Și  $-3a = b \Rightarrow b = 3$  .....3p

**Problema 4** (autor Cleopatra Olaru)

Se consideră hexagonul regulat  $ABCDEF$ , fie  $O$  punctul de intersecție al diagonalelor,  $M$  mijlocul lui  $AB$  și  $N$  mijlocul lui  $CD$ .

- a) Să se determine valoarea parametrului real  $k$  din relația  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- b) Să se descompună vectorul  $\overrightarrow{MN}$  în funcție de vectorii  $\overrightarrow{AF}$  și  $\overrightarrow{DE}$ .
- c) Să se calculeze  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$  în funcție de  $\overrightarrow{MO}$ .

Soluție:

a)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{7}{6}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 3p$

$k = -\frac{7}{6} \dots\dots\dots 2p$

b)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \dots\dots\dots 3p$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AO} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) = \frac{3}{2}(\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BA}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} \dots\dots\dots 2p$

c)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MD}) = \dots\dots\dots 2p$

$= \vec{0} + 2\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO} = 6\overrightarrow{MO} \dots\dots\dots 3p$