MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a XI-a – soluţii

Problema 1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \log_2(1+a_k) = 2$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Avem $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (inducţie) şi $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita $\ell \in [0,1)$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\ell = \dfrac{\ell}{1+\sqrt{1+\ell}}$, de unde $\ell = 0$ **1p**

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\sqrt{1+a_n}) = 2$ **1p**

Din relaţia de recurenţă rezultă $1 + a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Atunci $\log_2(1+a_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\log_2(1+a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\log_2(1+a_1) = \log_2 2 = 1$, obţinem $\log_2(1+a_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (progresie geometrică cu primul termen 1 şi raţia 1/2) **1p**

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \log_2(1+a_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 2$ **2p**

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă $\det(A + X_{ij}) = \det(A + X_{ji})$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea care are 1 pe poziţia (i, j) şi 0 în rest.

a) Arătaţi că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ şi $\det(A) \neq 0$, atunci $A = A^T$.

b) Daţi un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \neq A^T$.

Soluţie.

a) Fie $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prin dezvoltare după linia i, obţinem $\det(A + X_{ij}) = \det(A) + \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este complementul algebric al elementului de pe poziţia (i, j) al matricei A **1p**

Cum A are proprietatea $(\mathcal{P})$, rezultă $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deci A^* (adjuncta lui A) este matrice simetrică **1p**

Notăm $d = \det(A) \neq 0$. Avem $AA^* = dI_n = (dI_n)^T = (A^*A)^T = A^T(A^*)^T = A^TA^*$. **2p**

Cum $d\det(A^*) = \det(AA^*) = \det(dI_n) = d^n$, iar $d \neq 0$, rezultă că matricea A^* este inversabilă. Atunci, din relaţia $AA^* = A^TA^*$, rezultă $A = A^T$ **1p**

b) Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matricea care are 1 pe poziţiile (1,1) şi (1,2) şi 0 în rest. Cum $n \geq 3$, matricea $A + X_{ij}$ are cel puţin o linie nulă, deci $\det(A + X_{ij}) = 0$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Rezultă că A are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \neq A^T$ **2p**

Problema 3. Fie $f : [0.\infty) \to [0, \infty)$ o funcţie continuă şi bijectivă, astfel ca

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} = 1.$$

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, pentru oricare $a > 0$.

b) Daţi un exemplu de funcţie f care satisface condiţiile din enunţ.

Soluţie.

a) Avem $f(0) = 0$ (reducere la absurd). Atunci, pe baza ipotezei, deducem că f este strict crescătoare, cu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, iar $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este strict crescătoare, cu $f^{-1}(0) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f^{-1}(x) = \infty$ **1p**

Limita din ipoteză asigură existenţa unui număr $u > 0$ astfel încât $\dfrac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} > \dfrac{1}{2}$, $\forall\, x > u$. Rezultă $\dfrac{f(x)}{x} > f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\forall\, x > u$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \infty$, obţinem $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ **2p**

Fie $a > 0$, arbitrat, fixat.

Cazul $a = 1$ este clar.

Cazul $a \in (0, 1)$. Există $t > 0$ astfel ca $f^{-1}(x) > \dfrac{1}{a}$, $\forall\, x > t$. Rezultă

$$f^{-1}(x) > f^{-1}(ax) = f^{-1}(af(f^{-1}(x)) > f^{-1}\left(\frac{f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)}\right), \ \forall\, x > t.$$

Obţinem

$$\frac{f^{-1}\left(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x)\right)}{f^{-1}(x)} < \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} < 1, \ \forall\, x > t.$$

Pe baza ipotezei şi condiţiei $\lim\limits_{x\to\infty} f^{-1}(x) = \infty$, obţinem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}\left(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x)\right)}{f^{-1}(x)} \overset{y=f^{-1}(x)}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{f^{-1}(f(y)/y)}{y} = 1.$$

Atunci, conform *criteriului cleşte*, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$.

Cazul $a \in (1, \infty)$. Atunci $b = 1/a \in (0, 1)$. Conform cazului anterior, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f^{-1}(b(ax))}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, $\forall\, a > 0$ **2p**

b) Exemplu. Funcţia bijectivă $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = e^x - 1$, $x \in [0, \infty)$, cu inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \ln(x + 1)$ satisface condiţiile din enunţ...................... **2p**

Problema 4. Determinaţi toate tripletele de matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{cases} A = BC - CB \\ B = CA - AC \\ C = AB - BA \end{cases}.$$

Soluţia 1. Dacă una dintre matricele A, B, C este nulă, atunci $A = B = C = O_2$ **1p**
Presupunem că există matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ care satisfac ecuaţiile din enunţ.
Din $\operatorname{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\operatorname{tr}(A) = 0$. Similar, $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C) = 0$ **1p**
Din ecuaţia $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, rezultă $A^2 = aI_2$, unde $a = -\det(A)$.
Similar, $B^2 = bI_2$ şi $C^2 = cI_2$, cu $b = -\det(B)$ şi $c = -\det(C)$ **1p**
Înmulţind ecuaţia $A = BC - CB$ cu B la stânga şi respectiv la dreapta, obţinem relaţiile $BA = B^2C - BCB = bC - BCB$ şi $AB = BCB - CB^2 = BCB - bC$. Atunci $AB + BA = O_2$, iar din ecuaţia $C = AB - BA$, rezultă $C = 2AB$. Similar, $A = 2BC$ şi $B = 2CA$ **1p**
Atunci $A = -2CB = -2C(2CA) = -4C^2A = -4cA$. Similar, $B = -4aB$ şi $C = -4bC$ **1p**
Cum matricele A, B şi C sunt presupuse nenule, obţinem $a = b = c = -1/4$, deci avem $\det(A) = \det(B) = \det(C) = 1/4$. Rezultă că matricele A şi B sunt de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & -s \end{pmatrix}$, cu $x, y, z, s, t, u \in \mathbb{R}$, astfel încât $x^2 + yz = -1/4$ şi $s^2 + tu = -1/4$.
Din relaţia $AB + BA = O_2$ rezultă $2xs = -(yu + zt)$. Obţinem:

$$4x^2s^2 = (yu + zt)^2 = (yu - zt)^2 + 4yztu \geq 4(yz)(tu) = 4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Dar $x^2s^2 < \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)$, $\forall\, x, s \in \mathbb{R}$. Contradicţie.
Prin urmare, soluţia unică a sistemului din enunţ este $A = B = C = O_2$ **2p**

Soluţia 2. Fie trei matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac sistemul de ecuaţii din enunţ.
Din $\operatorname{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\operatorname{tr}(A) = 0$. Similar, $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C) = 0$ **1p**
Atunci $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & -c_1 \end{pmatrix}$, cu $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.
.... **1p**
Obţinem $BC - CB = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & 2(b_1c_2 - b_2c_1) \\ 2(b_3c_1 - b_1c_3) & -(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$ **1p**
Deci $a_2 = 2(b_1c_2 - b_2c_1)$, de unde $a_2^2 = 2a_2(b_1c_2 - b_2c_1) = 2a_2b_1c_2 - 2a_2b_2c_1$. Similar, obţinem: $b_2^2 = 2b_2c_1a_2 - 2b_2c_2a_1$ şi $c_2^2 = 2c_2a_1b_2 - 2c_2a_2b_1$. Rezultă $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0$. Cum $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, obţinem: $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ **2p**
Analog arătăm $a_3 = b_3 = c_3 = 0$. Atunci $a_1 = b_2c_3 - b_3c_2 = 0$. Similar, $b_1 = c_1 = 0$.
Prin urmare, soluţia unică a sistemului din enunţ este $A = B = C = O_2$ **2p**